

# Representación Gráfica de la Cantidad de Relevancia en los Diagramas de Influencia

Publicado en Revista UPIICSA (IPN), vol. IV No. 30 pp.2-7, diciembre 2002

**Roberto Ley Borrás\***

\*Doctor en Ingeniería de Sistemas Económicos con concentración en análisis de decisiones por la Stanford University (California, EUA). Profesor Investigador del Posgrado de Ingeniería Industrial del Instituto Tecnológico de Orizaba (DGIT-SEP). rley(a)decidir.org. <http://decidir.org>

## Introducción

El análisis de decisiones tiene el propósito de clarificar las situaciones difíciles que enfrentan las personas y las organizaciones, para que éstas estén en condiciones de emprender las acciones que maximicen la probabilidad de lograr sus objetivos. Para lograr esa claridad de acción, los analistas de decisiones utilizan modelos gráficos que facilitan la visualización de situaciones complejas. Uno de los modelos más útiles es el diagrama de influencia con su capacidad para representar de manera compacta las decisiones, eventos inciertos y resultados, y la relación que tienen entre sí. En este artículo se describe un enriquecimiento a la representación de relevancia en los diagramas de influencia que aumenta la utilidad de estos diagramas para la estructuración de decisiones complejas.

Una de las razones por las que los diagramas de influencia son tan valiosos para modelar situaciones de decisión es su habilidad de mostrar la relevancia (dependencia probabilística) entre las variables inciertas; en contraste, la relevancia es una relación que queda enmascarada cuando se modela utilizando árboles de decisiones.

La relevancia se representa en los diagramas de influencia como flechas que llegan a un nodo probabilístico, ya sea desde un nodo de decisión o desde otro nodo probabilístico. La existencia de la flecha significa que el conocimiento que se tiene sobre el nodo en el que se origina la flecha puede modificar la distribución de probabilidad del nodo probabilístico al que llega la flecha.

Sin embargo, las flechas que llegan a un nodo probabilístico en un diagrama de influencia pueden representar muy diferentes niveles de relevancia. Se utiliza la flecha tanto para indicar que el conocimiento del nodo condicionante puede modificar ligeramente la distribución de probabilidad, como para indicar que dicho conocimiento puede generar una modificación drástica (un ejemplo de esta situación se describe en la segunda sección de este artículo).

La principal razón para esa falta de discriminación entre niveles de relevancia es la ausencia de una medida cuantitativa de relevancia que sea fácil de entender y de comunicar. Para superar esa limitación, el autor desarrolló una medida de relevancia entre variables inciertas discretas (que se describe en este artículo). La medida, llamada *Relevancia Ponderada*, es fácil de calcular y es consistente con nuestra valoración intuitiva de relevancia entre eventos inciertos.

En este artículo se plantea el enriquecimiento de la representación de relevancia en los diagramas de influencia utilizando la Relevancia Ponderada; esto se logra haciendo que las flechas de relevancia y de influencia incluyan la información sobre la cantidad de relevancia en forma gráfica y numérica.

En la primera sección de este artículo se describen brevemente los diagramas de influencia, el concepto de relevancia y la representación tradicional de la relevancia; en la segunda sección se aborda la percepción de la relevancia y se describe brevemente el método para calcular la Relevancia Ponderada; en la tercera sección se presenta la utilización de la medida de relevancia para aumentar la capacidad de representación de los diagramas de influencia; y en la cuarta sección se plantea la medición de un tipo particular de relevancia: la influencia de alternativas.

## 1. Diagramas de influencia y representación tradicional de relevancia

Los diagramas de influencia son una representación compacta de todos los elementos de una situación de decisión. El diagrama permite representar situaciones con muchos elementos sin que su tamaño aumente en forma exponencial (como sucede con los árboles de decisiones). Esta economía de tamaño se logra representando las decisiones y eventos inciertos, pero manteniendo "ocultos" en un segundo nivel las alternativas y sucesos; los resultados se representan con un solo nodo de valor. Un aspecto clave para que esta representación en dos niveles sea práctica es la utilización de programas de cómputo para la solución de los diagramas de influencia. De hecho, estos diagramas fueron planteados desde el principio para ser calculados automáticamente. Los diagramas de influencia fueron ideados por Ronald Howard y James Matheson (1981) y el algoritmo de solución computacional fue desarrollado por Ross Shachter (1986, 1988). Una introducción a los diagramas de influencia y su algoritmo de solución puede consultarse en (Ley Borrás 2001). Los diagramas de influencia también son llamados diagramas de decisión (Howard 1988).

En estos diagramas las decisiones se representan mediante rectángulos (nodos de decisión); las flechas que llegan a un nodo de decisión indican que se dispone de la **información** contenida en el nodo origen cuando se toma la decisión. Si el nodo origen es otro de decisión, se está indicando que esa otra decisión fue tomada antes y ahora se sabe qué alternativa fue seleccionada. Por ejemplo, en la Figura 1a, si la decisión A es la adquisición de un equipo industrial y la decisión L es la selección del lugar de instalación, el diagrama indica que al decidir el lugar de instalación ya se sabe que equipo se seleccionó para ser adquirido en la decisión A. Generalmente se utilizan líneas punteadas para trazar las flechas que llegan a un nodo de decisión, aunque algunos autores utilizan líneas sólidas.

Si el nodo origen corresponde a una variable probabilística, representado por un óvalo, se está indicando que al momento de tomar la decisión ya se conoce el

suceso que ocurrió. Por ejemplo, en la Figura 1b, si el evento C es el monto de la cotización para la instalación del equipo industrial, la flecha punteada que llega al nodo A indica que se conoce el monto de la cotización en el momento de tomar la decisión de adquisición A.

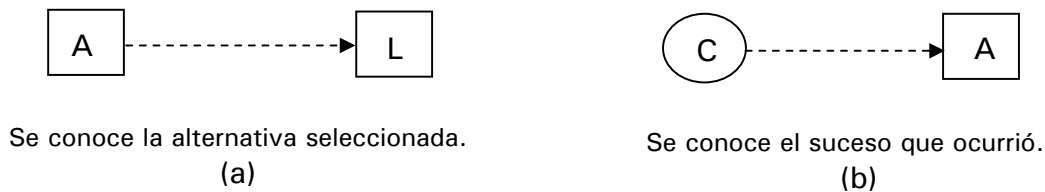


Figura 1. Flechas indicando información conocida al tomar la decisión

Otra relación de gran importancia que se representa en los diagramas de influencia, es la de **impacto**. La relación de impacto se da cuando las alternativas seleccionadas o los sucesos que pueden ocurrir, modifican los resultados que tienen valor para el decisor. Por ejemplo, si el nodo de valor son los resultados económicos, y si implementar la alternativa tiene un costo, o un cierto suceso produce ingresos, los nodos correspondientes tendrán un impacto en el nodo de valor. La relación de impacto se representa como una flecha que se origina en un nodo de decisión o probabilístico y que llega al nodo de valor, como se ilustra en la Figura 2.

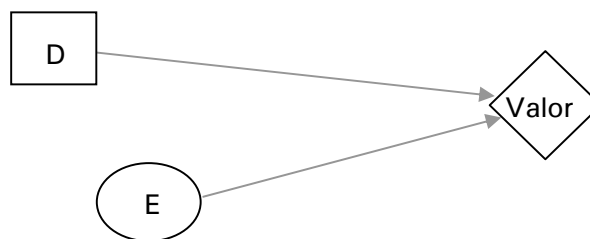
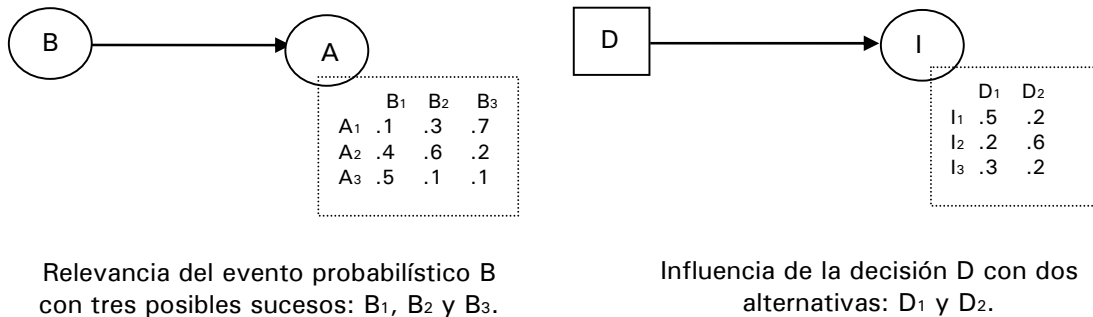


Figura 2. Flechas indicando el impacto de una decisión y un evento probabilístico en el nodo de valor.

Abordemos ahora la relación que es central a este artículo: relevancia. Las flechas que llegan a un nodo de probabilidad (un óvalo) representan **relevancia** del nodo origen al nodo destino; también se dice que el nodo destino está condicionado en el nodo origen. *En análisis de decisiones, relevancia tiene el significado preciso de cambio en la distribución de probabilidad del nodo destino en función de los sucesos o alternativas del nodo origen.* El nodo destino contiene un conjunto de distribuciones de probabilidad condicional. Si el nodo origen es de incertidumbre, la ocurrencia de diferentes sucesos modifica la distribución de probabilidad del nodo destino, y si el nodo origen es un nodo de decisión, la selección de diferentes alternativas por el decisor modifica la distribución de probabilidad del nodo destino. La relevancia de alternativas se conoce también como **influencia**. Para representar

la relevancia se utilizan líneas llenas en las flechas que llegan a un nodo de incertidumbre, como se muestra en la Figura 3.



*Figura 3. La relevancia (y la influencia) implica la existencia de vectores diferentes de probabilidad en el nodo probabilístico condicionado.*

En la Figura 3 también se muestran, en las columnas de los recuadros punteados, las distribuciones de probabilidad condicional que están contenidas en el nodo; las columnas contienen un valor de probabilidad para cada suceso del evento A y el evento I, y existen tantas columnas como sucesos o alternativas condicionantes existen. La información en los recuadros generalmente permanece en segundo plano en los programas de cómputo para modelación de diagramas de influencia. El hecho de que las distribuciones de probabilidad de A sean diferentes dependiendo del suceso del nodo B, o que las distribuciones de probabilidad de I sean diferentes para cada alternativa del nodo D, muestra que existe relevancia. Sin embargo, la flecha que une los nodos **no** da indicación alguna acerca de la magnitud de la relevancia.

Un nodo probabilístico puede estar condicionado por varios nodos probabilísticos, por varios nodos de decisión o por cualquier combinación de ellos. La variable representada por tal nodo será la distribución de probabilidad condicionada en cada uno de los nodos origen de las flechas que llegan al nodo. El nodo probabilístico tendrá una distribución de probabilidad de la variable por cada combinación de sucesos o alternativas de los nodos condicionantes. Por ejemplo, si un nodo de incertidumbre está condicionado en dos eventos, uno con dos posibles sucesos y otro con tres posibles sucesos, el nodo contendrá seis distribuciones de probabilidad condicional.

## 2. Percepción y Medición de la Relevancia

### Percibiendo la relevancia de un suceso a un evento

La relevancia de un suceso S<sub>i</sub> a un evento E se observa (analítica e intuitivamente) en la modificación de la distribución de probabilidad del evento E (con respecto a la distribución previa de E) al ocurrir el suceso S<sub>i</sub>. Esto significa que si la distribución

de probabilidad de E condicionada en el suceso  $S_i$ ,  $\{E|S_i\}$ , usando notación inferencial simplificada, es muy similar a la distribución de probabilidad previa de E,  $\{E\}$ , se percibe que el suceso  $S_i$  es poco relevante a E, esto es, tiene poco efecto en la distribución de probabilidad que se asigna a E.

Por ejemplo, considérese que el evento E es la compañía que obtendrá un importante contrato, y hay tres compañías que pueden obtener el contrato, W, X y Z, y la asignación de probabilidad a este evento es  $\{E\} = (.70, .20, .10)$ . Si ocurre el suceso  $S_i$ : "la compañía W logró otro contrato importante", la probabilidad condicionada (probabilidad posterior) del evento E puede ser  $\{E|S_i\} = (.71, .19, .10)$ . Dado que se modificó la distribución de probabilidad, el suceso es relevante, pero se puede ver que el cambio en la distribución de probabilidad es muy pequeño, tal vez porque la compañía W sea la líder del mercado y el que haya obtenido un contrato más, no da mucha información (no es noticia).

No es sencillo cuantificar el cambio en la forma de la distribución de probabilidad previa a la distribución de probabilidad condicionada, pero la distancia geométrica entre dos puntos en el hiperplano de distribuciones de probabilidad discretas proporciona una indicación de la diferencia de forma entre dos distribuciones de probabilidad (Ley Borrás 2000a, 2000b): mientras mayor es la distancia entre los puntos, más diferentes son las distribuciones. La expresión matemática para la distancia entre dos puntos es una manera de resumir las diferencias entre los valores de probabilidad correspondientes de dos distribuciones discretas. Por esta razón se usa esta propiedad como base para medir relevancia entre un suceso y un evento con distribución de probabilidad discreta.

#### **Definición de relevancia de un suceso a un evento**

La relevancia del estado  $B_i$  al evento A está definida (Ley Borrás 2000a, 2000b) como la distancia geométrica entre dos puntos representando distribuciones de probabilidad. Un punto representa la distribución de probabilidad previa de A,  $\{A\}$ , con valores  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , y el otro punto representa la distribución de probabilidad posterior de A dado el resultado  $B_i$ ,  $\{A|B_i\}$ , con valores  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Así, se tiene que:

$$R(A,B_i) = [ (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + \dots + (p_n-q_n)^2 ]^{1/2}$$

El valor  $R(A,B_i)$ , *relevancia del suceso  $B_i$  al evento A*, mide la diferencia en la forma de la distribución previa  $\{A\}$ , y la distribución posterior  $\{A|B_i\}$ , dada la ocurrencia de un suceso particular  $B_i$ . El valor R permite comparar la forma de dos distribuciones de probabilidad de una manera cuantitativa simple. Entre más lejano está un punto de probabilidad posterior del punto que representa a la distribución previa, más relevante (más informativo) será el suceso condicionante correspondiente.

### Relevancia de un evento a otro evento: Relevancia Ponderada

Las flechas de los diagramas de influencia representan la relevancia de un evento a otro, no de un suceso a un evento (que es lo que mide  $R$ ), así que para enriquecer la representación de la relevancia mediante flechas, es necesario contar con una forma de medir la relevancia entre eventos.

Usando como base el valor  $R$  definido en el párrafo anterior, se puede calcular la relevancia de un evento a otro. Si el evento  $B$  es relevante al evento  $A$  (como se representa en el diagrama de la izquierda en la Figura 3), se puede calcular la relevancia de cada uno de los  $n$  sucesos  $B_i$  en el evento  $A$ , esto es,  $R(A, B_i)$  y obtener un conjunto de  $n$  valores que reflejan el cambio en la distribución de probabilidad de  $A$  producido por la revelación del suceso del evento  $B$  que ocurrió. Si en el momento de realizar la medición de la relevancia, el evento  $B$  todavía es incierto (como es generalmente el caso), no se puede establecer unívocamente el cambio que producirá conocer  $B$  en la distribución de probabilidad de  $A$ , pero se puede calcular el valor esperado de ese cambio; éste es llamado **relevancia ponderada de  $B$  a  $A$** , denotada  $\langle R(A, B) \rangle$ , y está definida (Ley Borrás 200b) como:

$$\langle R(A, B) \rangle = \sum_{i=1}^n \{B_i\} R(A, B_i)$$

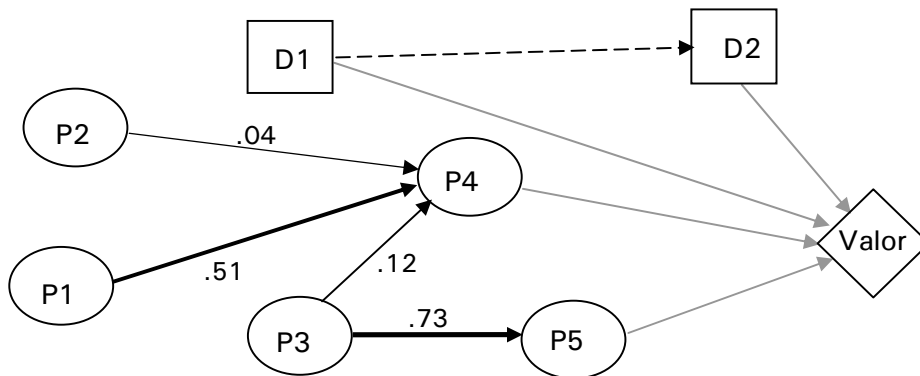
Donde  $\{B_i\}$  es la probabilidad de observar el suceso  $B_i$  y  $R(A, B_i)$  es la relevancia del suceso  $B_i$  en el evento  $A$ . La relevancia ponderada, denotada en forma general por  $\langle R \rangle$ , mide la relevancia de un evento a otro evento.

La relevancia y la relevancia ponderada tienen varias aplicaciones en el análisis de decisiones y en la modelación probabilística; una de éstas es el enriquecimiento de la capacidad de representación y comunicación de los diagramas de influencia.

### 3. Utilización de la Relevancia Ponderada en Diagramas de Influencia

Se puede mejorar la representación de la relevancia en diagramas de influencia escribiendo la relevancia ponderada  $\langle R \rangle$  en las flechas que indican relevancia y/o usando flechas más gruesas para mostrar relevancia de mayor magnitud. Al hacer esto se mostrará gráficamente la intensidad del efecto de cada variable en otras y se hará del diagrama de influencia una mejor herramienta de comunicación con clientes y expertos. Este enriquecimiento puede ser especialmente útil en diagramas con muchas variables interrelacionadas.

Un ejemplo de diagrama de influencia enriquecido se presenta en la Figura 4. Las flechas punteadas indican información disponible al tomar una decisión, las flechas grises indican impacto en la función de valor, y las flechas negras de diferentes espesores indican relevancia. Los números adyacentes a las flechas de relevancia son los valores de relevancia ponderada.



*Figura 4. Diagrama de influencia mostrando diferentes grados de relevancia ponderada.*

El diagrama consta de cinco nodos probabilísticos (nodos ovalados marcados P1 a P5), dos nodos cuadrados de decisión (marcados D1 y D2) y el nodo de valor. En el diagrama se representan cuatro relaciones de relevancia (flechas que llegan a algún nodo probabilístico) y al lado de cada una de esas flechas está escrito el valor de relevancia ponderada. El espesor de las flechas de relevancia aumenta al aumentar la relevancia ponderada que la flecha representa.

El diagrama de la Figura 4 es más informativo que un diagrama de influencia tradicional. En la Figura 4 se puede observar de inmediato que aunque hay tres nodos (P1, P2 y P3) relevantes al nodo P4, el nodo P1 es el que puede producir un cambio mayor en la distribución de probabilidad de P4. Similarmente se puede observar de inmediato que el nodo P3 tiene un efecto muy fuerte en la distribución de probabilidad de P5.

Esta mejora en la capacidad de representación de la relevancia también puede aplicarse a diagramas de relevancia (que contiene sólo nodos probabilísticos) y a los mapas de conocimiento (que extienden la capacidad de los diagramas de relevancia) ya que estos diagramas también representan la relevancia entre variables mediante flechas.

Los programas de computadora para modelación de diagramas de influencia pueden ampliar su utilidad para el usuario calculando automáticamente la Relevancia Ponderada entre cada par de nodos entre los que existe relevancia, e imprimiendo <R> junto a la flecha que une los dos nodos. Cuando una flecha es invertida (aplicando el teorema de Bayes), el programa puede recalcularse <R> expresando la relevancia en la otra dirección.

#### 4. Midiendo la influencia de alternativas

La influencia (Howard 1990) es el cambio en la distribución de probabilidad de un evento debido a la alternativa seleccionada en un nodo de decisión. Se dice que un nodo de decisión influye en un nodo probabilístico cuando la elección de por lo menos una alternativa particular cambia la distribución de probabilidad asociada con el nodo probabilístico. Este tipo particular de relevancia puede medirse de una manera similar a como se mide la relevancia de los sucesos de un nodo probabilístico: se debe comparar la probabilidad posterior condicionada en cada alternativa con la distribución de probabilidad previa. La distancia geométrica para cada par de distribuciones indica la relevancia de cada alternativa.

Aunque no se puede calcular la relevancia ponderada para influencias (porque no hay probabilidades asociadas a las alternativas), se puede usar la relevancia máxima entre las alternativas de un nodo de decisión como una indicación de la fuerza del vínculo de influencia entre los dos nodos. El valor de relevancia máximo puede escribirse en la flecha de influencia, como se muestra en la Figura 5.

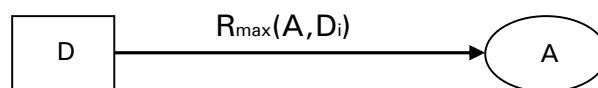


Figura 5. Usando la relevancia máxima como una medida de influencia.

#### Conclusiones

Los diagramas de influencia y otros diagramas derivados de él han sido una valiosa forma de modelación de decisiones por casi dos décadas. Durante ese tiempo, la relevancia entre variables ha sido expresada gráficamente como una relación binaria (existe o no relevancia entre nodos) aunque en realidad la relación de relevancia existe en el rango completo que va desde la irrelevancia (independencia probabilística) hasta la relación determinística en la que cada suceso de la variable relevante determina con certeza el valor de la variable dependiente, e incluyendo un número infinito de intensidades intermedias de relevancia.

La forma de representación de la relevancia descrita en este artículo aumenta la capacidad de modelación de los diagramas de influencia utilizando una medida de relevancia, relevancia ponderada, que es fácil de calcular y corresponde la percepción directa de relevancia; esto es, refleja el cambio en la distribución de probabilidad de la variable condicionada.

Los valores numéricos expresados con las flechas del diagrama y los diferentes espesores de las flechas mismas, hacen explícita la magnitud de la relevancia y convierten a los diagramas de influencia en un mejor medio para que los analistas entiendan las situaciones de decisión y se convierte en una mejor herramienta de comunicación entre los participantes en el proceso de decisión.



Esta forma de representación es especialmente útil en diagramas con muchas variables interrelacionadas y puede integrarse a los programas de cómputo disponibles para modelar y calcular diagramas de influencia.

### Referencias

- Howard, Ronald A. (1990) "From Influence to Relevance to Knowledge". In Oliver, R. M. and J. Q. Smith (eds.). *Influence Diagrams, Belief Nets and Decision Analysis*. Wiley, New York.
- Howard, Ronald A. (1988) "Decision Analysis: Practice and Promise". *Management Science*. Vol. 34, No. 6.
- Howard, Ronald A., James E. Matheson (1981) "Influence Diagrams" in Howard, R. A. y J. E. Matheson (eds.) *The Principles and Applications of Decision Analysis* (1983). Strategic Decisions Group. Palo Alto, California.
- Ley Borrás, Roberto (2001) *Análisis de Incertidumbre y Riesgo para la Toma de Decisiones*. Comunidad Morelos, México. <http://decisiones.tripod.com>.
- Ley Borrás, Roberto (2000a) *A Measure of Relevance*, INFORMS Meeting San Antonio Texas, Octubre.
- Ley Borrás, Roberto (2000b) *Medición de la Relevancia en Análisis de Decisiones*. Reporte de Proyecto de Investigación. Instituto Tecnológico de Orizaba.
- Shachter, Ross D. (1988) "Probabilistic Inference and Influence Diagrams". *Operations Research*, Vol. 36 No.4.
- Shachter, Ross D. (1986) "Evaluating Influence Diagrams". *Operations Research*, Vol. 34 No. 6.